実数と級数

氷上優希 (@coolplus099)

2014 年 11 月 10 日

目次

1 実数

X を順序集合とする．

> **定義 （上界，下界）** $A \subset X$ とする．
> $x \in X$ が A の **上界** であるとは，任意の $a \in A$ に対して $a \leq x$ が成り立つことである．
> $x \in X$ が A の **下界** であるとは，任意の $a \in A$ に対して $a \geq x$ が成り立つことである．

このノートのみにおける記号として，集合 A の上界全体と下界全体を

$$\mathrm{UB}(A) = \left\{ x \in X \;\middle|\; {}^\forall a \in A \quad a \leq x \right\}$$
$$\mathrm{LB}(A) = \left\{ x \in X \;\middle|\; {}^\forall a \in A \quad a \geq x \right\}$$

とおく．

> **命題 1.1** $A \subset X$ に対して次が成り立つ．
> $$A \subset \mathrm{LB}(\mathrm{UB}(A)), \quad A \subset \mathrm{UB}(\mathrm{LB}(A))$$

証明 任意に $x \in A$ をとる．$y \in \mathrm{UB}(A)$ を任意にとると $x \leq y$ であり，x は $\mathrm{UB}(A)$ の下界である．後者も同様． ■

さらに，$A \subset X$ に対して

$$
\begin{aligned}
\max A &= A \cap \mathrm{UB}(A) \\
\min A &= A \cap \mathrm{LB}(A)
\end{aligned}
$$

とおき，それぞれの元を A の **最大元，最小元** とよぶ．

> **命題 1.2**　$A \subset X$ とする．A の最大元，最小元は存在するなら一意的である．

証明　a, b がともに A の最大元であるとする．$a \in A$ かつ $b \in \max A$ であるから $a \leq b$．また $b \in A$ かつ $a \in \max A$ であるから $b \leq a$．したがって $a = b$ である．最小元も同様．■

以下，$\max A, \min A \neq \emptyset$ のときは $\max A = a$ を $\max A = a$ のようにかくことにする．

> **定義（最小上界，最大下界）**　$A \subset X$ に対して $\sup A$ と $\inf A$ を，
>
> $$
> \begin{aligned}
> \sup A &= \min(\mathrm{UB}(A)) \\
> \inf A &= \max(\mathrm{LB}(A))
> \end{aligned}
> $$
>
> で定め，それぞれ A の **最小上界（または上限）**，**最大下界（または下限）** という．

> **命題 1.3**　$A \subset X$ とする．$\max A$ が存在すれば $\sup A$ も存在し，$\sup A = \max A$ である．また，$\min A$ が存在すれば $\inf A$ も存在し，$\inf A = \min A$ である．

証明　$a = \max A$ とおく．

$$
a \in A \cap \mathrm{UB}(A) \subset \mathrm{LB}(\mathrm{UB}(A)) \cap \mathrm{UB}(A)
$$

これは a が A の最小上界であることに他ならない．ゆえに $\sup A = \max A$．後者も同様．■

> **定義（切断）**　X は全順序集合，$A, B \subset X$ とする．組 (A, B) が X の **切断** であるとは，
>
> $$
> A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = X, \quad A, B \neq \emptyset, \quad A < B
> $$
>
> であることをいう．ここに $A < B$ とは，
>
> $$
> {}^{\forall}a \in A \quad b \in B \quad a < b
> $$
>
> であることをいう．

順序体 K について次の条件を考える．

(A, B) が K の切断ならば，$\max A$ か $\min B$ のいずれかが存在する．

これは順序完備性と呼ばれる性質である．この条件をみたすとき，$\max A$ と $\min B$ は同時に存在することはない．実際，両方が同時に存在すると仮定すると，

$$\max A < \frac{1}{2}(\max A + \min B) < \min B, \quad \frac{1}{2}(\max A + \min B) \notin A, \quad \frac{1}{2}(\max A + \min B) \notin B$$

となり，$A \cup B = K$ に反する．

また，順序完備性をもつ順序体が存在すること，さらにそれらは同型を除いて一意的であることがが知られている．

以後，順序完備性を持つ順序体を $\mathbb{R}$ とし，この元を実数とよぶことにする．

定義 （有界） $A \subset \mathbb{R}$ とする．A の上界が存在するとき，A は **上に有界** である，A の下界が存在するとき，A は **下に有界** であるという．また，A が上に有界かつ下に有界のとき，単に A は **有界** であるという．

命題 1.4 $A \subset \mathbb{R}$ とする．$A \neq \emptyset$ かつ A が上に有界ならば $\sup A$ が存在する．また，$A \neq \emptyset$ かつ A が下に有界ならば $\inf A$ が存在する．

証明 $\mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A), \mathrm{UB}(A)$ が $\mathbb{R}$ の切断であることを示す．

$a \in A$ に対して $a - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A)$ であるから $\mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A) \neq \emptyset$ である．また，$\mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A) \cap \mathrm{UB}(A) = \emptyset$，$\mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A) \cup \mathrm{UB}(A) = \mathbb{R}$ は明らか．

$\mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A) < \mathrm{UB}(A)$ であることを背理法で示そう．$x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A)$，$y \in \mathrm{UB}(A)$ を任意にとる．$y \leq x$ だと仮定すると上界の定義より，

$$^{\forall}\xi \in A \quad \xi \leq y$$

また，仮定より $\xi \leq x$ である．これは $x \in \mathrm{UB}(A)$ を示すが，$x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A)$ に矛盾．よって $\mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A) < \mathrm{UB}(A)$ であり，$\mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A), \mathrm{UB}(A)$ は $\mathbb{R}$ の切断である．

$\sup A = \min \mathrm{UB}(A) = \emptyset$ と仮定すると，順序完備性から $\max(\mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A))$ が存在し，それは $\sup(\mathbb{R} \setminus \mathrm{UB}(A))$ に一致する，これは $\sup A$ に他ならない．ゆえに $\sup A = \min \mathrm{UB}(A)$ は存在する．

$\inf A = \max \mathrm{LB}(A)$ についても同様の議論で存在が示される． ■

以上を踏まえて最小上界と最大下界について次のように約束する：

$$\sup A = \begin{cases} -\infty & (A = \emptyset) \\ \infty & (A \neq \emptyset \text{ かつ } \mathrm{UB}(A) = \emptyset) \\ \min(\mathrm{UB}(A)) & (otherwise) \end{cases}, \quad \inf A = \begin{cases} \infty & (A = \emptyset) \\ -\infty & (A \neq \emptyset \text{ かつ } \mathrm{LB}(A) = \emptyset) \\ \max(\mathrm{LB}(A)) & (otherwise) \end{cases}$$

定理 1.5 (最小上界，最大下界の特徴付け) $A \subset \mathbb{R}$，$s \in \mathbb{R}$ とする．$s = \sup A$ であるための必要十分条件は，次の 2 条件をともにみたすことである．

(i) 任意の $a \in A$ に対して $a \leq s$.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $a \in A$ が存在して $s - \varepsilon < a$.

同様に，$n = \inf A$ であるための必要十分条件は，次の 2 条件をともにみたすことである．

(i) 任意の $a \in A$ に対して $a \geq n$.
(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $a \in A$ が存在して $a < n + \varepsilon$.

証明 最小上界についてのみ示す．

$s = \sup A$ とおく．s は A の上界だから (i) はよい．(ii) がみたされない，すなわちある $\varepsilon > 0$ が存在して任意の $a \in A$ に対して $s - \varepsilon \geq a$ となると仮定する．このとき $s - \varepsilon$ は A の上界であり，かつ $s - \varepsilon < s$ だから $s = \sup A$ の最小性に矛盾する．ゆえに (ii) もみたされる．

(i)，(ii) をともにみたすと仮定し，対偶「t が A の上界ならば $s \leq t$ である」を示そう．(i) から s が A の上界であることを示している．$t < s$ とすると，$\varepsilon = s - t$ とすれば $\varepsilon > 0$ である．(ii) からある $a \in A$ が存在して $s - \varepsilon = t < a$ となる．これは t が A の上界ではないことを示している．t は任意であったから，$s = \sup A$ である． ■

定理 1.6 (Archimedes の原理) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $na > b$ となる．

証明 背理法で示す．ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して任意の $^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $na \leq b$ であると仮定する．b は $a\mathbb{N}$ の上界の一つである．$a\mathbb{N}$ は空でないから $\sup a\mathbb{N}$ が存在する．これを s とする．すると，$na \in A$ に対して $s - a < na$ となる．これは $s < (n+1)a \in a\mathbb{N}$ を示す．これは s が $a\mathbb{N}$ の上界であることに矛盾． ■

2 数列と収束

定義 (数列の極限) 数列 $\{a_n\}$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のときに a に **収束する** とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq n_0$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ であることをいう．このとき，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} a_n = a$ などと表し，a を $\{a_n\}$ の **極限値** という．

$\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のときに **正の無限大に発散する** とは，任意の $R > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq n_0$ ならば $a_n > R$ となることをいい，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} a_n = +\infty$ などと表す．

$\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のときに **負の無限大に発散する** とは，任意の $R > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $n \geq n_0$ ならば $a_n < R$ となることをいい，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} a_n = -\infty$ などと表す．

定理 2.1 (はさみうちの原理) 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ は $^\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq b_n \leq c_n$ とし，また $\{a_n\}, \{c_n\}$ は収束して，

$$\alpha = \lim_{x \to \infty} a_n = \lim_{x \to \infty} c_n$$

をみたすとする．このとき，$\{b_n\}$ も収束して $\alpha = \displaystyle\lim_{x \to \infty} b_n$.

証明　任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$n_0 \in \mathbb{N}$ で，任意の $n \geq n_0$ に対して $|a_n - a| < \varepsilon, |c_n - a| < \varepsilon$ となるものが存在する．このとき，

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon$$

が成り立つ．■

定義　(有界列，単調列)　数列 $\{a_n\}$ が**有界**であるとは，集合 $\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界であることをいう．$\{a_n\}$ が **単調増加** であるとは

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$$

が成り立つことをいい，$\{a_n\}$ が **単調減少** であるとは

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$$

が成り立つことをいう．また $\{a_n\}$ が単調増加または単調減少であるとき，**単調** であるという．

定理 2.2　有界かつ単調な数列は収束列である．

証明　単調増加の場合を示す．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$X = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は空でなく有界である．よって最小上界 $\alpha = \sup X \in \mathbb{R}$ が存在する．このとき $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq \alpha$ である．上限の特徴づけから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$ である．このとき，$n \geq n_0$ に対して

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \epsilon$$

であるから $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である．■

命題 2.3　$\{a_n\}$ は収束列で，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \leq n_0$ に対して $a_n \geq b$ となるとする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \geq b$ である．

証明　$\alpha := \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ として，$\alpha \leq b$ と仮定する．$\varepsilon = \dfrac{1}{2}(b - \alpha)$ とすると $\varepsilon > 0$．このとき，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_1$ に対して

$$a_n < \alpha < \alpha + \varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha + b) < b$$

である．$n = \max\{n_0, n_1\}$ とすれば上の結果より $a_n < b$，しかしこれは仮定の $a_n \geq b$ に矛盾．■

命題 2.4　$\mathbb{R}$ の有界閉区間の列 $I_1, I_2, \ldots$ について，$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \cdots$ ならば $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ である．

証明　$I_n = [a_n, b_n]$ とすると仮定より

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

である．これは $\{a_n\}$ が上界 b_1 をもち，かつ単調増加数列であることを示している．$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とすると任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $a_m \leq b_n$ であるから，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha \leq b_n$ である．すると，$\{b_n\}$ は下界 α をもつ単調減少数列であるから収束し，$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とすれば $\alpha \leq \beta$ である．ゆえに $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [\alpha, \beta] \neq \emptyset$. ■

> **定理 2.5 (Cantor の区間縮小法)** $\mathbb{R}$ の有界閉区間の列 $I_1, I_2, \ldots$ について $I_n = [a_n, b_n]$ とするとき，$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば,
>
> $$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = c$$
>
> となるただ一つの $c \in \mathbb{R}$ が存在する．また，$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

証明 一つ前の命題から $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに収束し，$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ であるから $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ である．これを c とすると $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ である．

$x > a$ となる x を任意にとると $\varepsilon = \frac{1}{2}(x - a) > 0$ である．これに対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ に対して

$$b_n < a + \varepsilon = \frac{1}{2}(x + a)$$

であるから $x \notin I_n$．よって $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ である．同様に $x < a$ となる x をとっても $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ であるから $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$. ■

上に有界な数列 $\{a_n\}$ を考える．$b_n = \sup_{k\geq n} a_k$ で数列 $\{b_n\}$ を定めるとこれは単調減少数列であり，極限 $\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在する．

同様に下に有界な数列 $\{a_n\}$ に対して $c_n = \inf_{k\geq n} a_k$ とすることで単調増加数列 $\{c_n\}$ を定めることができ，極限 $\lim_{n\to\infty} c_n$ が存在する．この考察のもとで，上極限と下極限を定義する．

> **定義 (上極限，下極限)** 実数列 $\{a_n\}$ に対してその $\{a_n\}$ の <u>**上極限**</u> を,
>
> $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k & (\{a_n\} \text{が上に有界なとき}) \\ +\infty & (otherwise) \end{cases}$$
>
> で，また <u>**下極限**</u> を
>
> $$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k & (\{a_n\} \text{が下に有界なとき}) \\ -\infty & (otherwise) \end{cases}$$
>
> で定める．

命題 2.6　実数列 $\{a_n\}$，$c \in \mathbb{R}$ に対して次の 2 組の条件はそれぞれ同値．

(S-i) $\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leq c$
(S-ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して $a_n < c + \varepsilon$ となる．

(I-i) $\varlimsup_{n\to\infty} a_n \geq c$
(I-ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して $a_n > c - \varepsilon$ となる．

証明　上極限についてのみ示す．

(S-i) $\Rightarrow$(S-ii) について．$\varepsilon > 0$ とする．(S-i) を仮定すると，数列 $\{a_n\}$ は上に有界である．$b_n = \sup_{k\geq n} a_k$ とする．$\{b_n\}$ は収束するから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ に対して

$$|b_n - \lim_{n\to\infty} b_n| < \varepsilon$$

よって，

$$b_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n + \varepsilon \leq c + \varepsilon$$

とできる．$a_n \leq b_n$ ゆえ，(Sii) が示された．

(Sii) $\Rightarrow$(Si): $\varepsilon > 0$ とする．(i) を仮定すると，数列 $\{a_n\}$ は $\max\{a_1, \cdots, a_{n_0-1}, c+\varepsilon\}$ を上界にもつ．$b_n = \sup_{k\geq n} a_k$ とすると $b_{n_0} \leq c + \varepsilon$ であり，$\{b_n\}$ は単調減少数列であるから Prop.2.5 より $\lim_{n\to\infty} b_n \leq c + \varepsilon$ である．これは (Si) を示す．■

命題 2.7　実数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

が成り立つ．

証明　$\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ または $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば明らか．これ以外のとき，数列 $\{a_n\}$ は有界．$b_n = \sup_{k\geq n} a_k$，$c_n = \inf_{k\geq n} a_k$ とすると，これらは収束列であり，

$$c_1 \leq \cdots \leq c_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_1$$

が成り立つ．ゆえに Prop.2.5 より，$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n$ である．■

命題 2.8　実数列 $\{a_n\}$ に対して次は同値である．

(i) $\varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$
(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n$ が，$\pm\infty$ も許して存在する．

また，このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$ である．

証明　(i) ⇒(ii): $c = \varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$ とおく．$c = \infty$ のとき，任意に $R > 0$ をとると，prop.2.6 からある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ に対して $a_n > (R+1) - 1 = R$ とできる．つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ である．$c = -\infty$ の場合も同様.

$c \in \mathbb{R}$ のとき，任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leq c$ であるから，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ に対して $a_n < c + \varepsilon$ である．また，$\varliminf_{n\to\infty} a_n \geq c$ であるから，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ に対して $a_n > c - \varepsilon$ である．したがって $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ のとき $|a_n - c| < \varepsilon$ であり，これは $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ を示す.

(ii) ⇒(i): $c = \lim_{n\to\infty} a_n$ とする．$c = \infty$ ならば任意の $R > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して $a_n > R$ となる．Prop.2.9 より $\varliminf_{n\to\infty} a_n = \infty$，したがって $\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n = \infty$. $c = -\infty$ のときも同様.

$c \in \mathbb{R}$ のとき，任意に $\varepsilon > 0$ をとる．このときある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して $|a - c| < \varepsilon$ となる．このとき $a < c + \varepsilon$ かつ $a > c - \varepsilon$ であるから $\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leq c$ かつ $\varliminf_{n\to\infty} a_n \geq c$，すなわち

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = c$$

(i) が示された.　■

> **定義　(Cauchy 列)**　数列 $\{a_n\}$ が <u>Cauchy **列**</u> であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $p, q \geq n_0$ に対して $|a_p - a_q| < \varepsilon$ となることをいう．

> **命題 2.9**　実数列 $\{a_n\}$ に対して次は同値である.
>
> (i) $\{a_n\}$ は収束列である.
> (ii) $\{a_n\}$ は Cauchy 列である.

証明　(i) ⇒(ii): $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$，任意に $\varepsilon > 0$ をとる．数列 $\{a_n\}$ が収束すると仮定すると，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ が存在して $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon$ とできる．$p, q \geq n_0$ ならば，三角不等式より

$$\begin{aligned} |a_p - a_q| &\leq |a_p - \alpha| + |a_q - \alpha| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

これは $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示す.

(ii) ⇒(i): 任意に $\varepsilon > 0$ をとる．数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であると仮定すると，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $p, q \geq n_0$ に対して $|a_p - a_q| < 1$ とできる．$\{a_n\}$ は
下界 $\min\{a_0, \cdots, a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1\}$ と上界 $\max\{a_0, \cdots, a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1\}$ をもち，有界である．よって，

$$-\infty < \varliminf_{n\to\infty} a_n < \varlimsup_{n\to\infty} a_n < \infty$$

したがって，

$$-\infty < \inf_{n\geq 1} a_n < \cdots < \inf_{n\geq k} a_n < \cdots < \sup_{n\geq k} a_n < \cdots < \sup_{n\geq 1} a_n < \infty$$

がいえる．区間 $I_l := \left[\inf_{n\geq l} a_n, \sup_{n\geq l} a_n\right]$ とすれば，この区間の列は $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \cdots$ をみたす．$n = \max\{p, q\}$ とすると，

$$0 < \sup_{n\geq l} a_n - \inf_{n\geq l} a_n \leq \sup_{n\geq l} |a_p - a_q| < \varepsilon$$

ゆえに $\sup_{n\geq l} a_n - \inf_{n\geq l} a_n \longrightarrow 0$．Cantor の区間縮小法（Theo.2.7）より，

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

がいえた．Prop.2.11 より，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は $\pm\infty$ を許して存在する．$\{a_n\}$ は有界であったから $\lim_{n\to\infty} a_n$ は有限値である，つまり収束する． ■

定理 2.10 (Bolzano-Weierstrass) 有界な数列 $\{a_n\}$ は収束部分列 $\{a_{n_k}\}$ をもつ．

証明 $\{a_n\}$ が有界とすると，$\{a_n\}$ はある閉区間 $I_0 = [m, M]$ に含まれる．I_0 を，

$$\left[m, \frac{1}{2}(m+M)\right], \left[\frac{1}{2}(m+M), M\right]$$

と 2 等分すると，どちらかの区間に $\{a_n\}$ の項が無限個含まれる．上で等分したうち，その無限個含んでいるほうの区間を I_1 とする．I_1 に対しても同様に 2 等分し，$\{a_n\}$ の項が無限個含まれるほうの区間を I_2 とする．……と，このプロセスを繰り返す．すると，閉区間の列 $\{I_k = [m_k, M_k]\}$ で，$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \cdots$ をみたすものが決まる．

$$M_k - m_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k (M - m) \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

となる．Cantor の区間縮小法より，$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{c\}$ となる $c \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在し，$\lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} M_k = c$.

さて，I_0 に含まれる $\{a_n\}$ の項で最も小さい番号のものを a_{n_1} とする．次に，I_1 に含まれる $\{a_n\}$ の項で，a_{n_1} を除いて最も小さい番号のものを a_{n_2} とする．以下同様にして I_k に含まれる $\{a_n\}$ の項で，$a_{n_1}, \cdots, a_{n_k}$ を除いて最も小さい番号のものを $a_{n_{k+1}}$ として，……と繰り返していくと，$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ が定まる．$n_k \neq n_j \quad (k \neq j)$ かつ $m_k \leq a_{n_k} \leq M_k$ が成り立つから，はさみうちの原理（Theo.2.2）より，

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} M_k = c$$

となり，$\{a_{n_k}\}$ は収束する． ■

命題 2.11 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を実数列で，それぞれ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ となるとする．このとき次が成り立つ．

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB$

(iii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \neq 0$ かつ $B \neq 0$ であるとき，$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$

3 関数と連続性

定義 (関数の収束) $\Omega \subset \mathbb{R}$，$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ を関数，$a \in \mathbb{R}$ とする．$x \to a$ のとき $f(x)$ が $A \in \mathbb{R}$ に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x \in \Omega$ に対して $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つことである．このとき，$\lim_{x \to a} f(x) = A$ などとかく．

また，$x \to a$ のとき $f(x)$ が $A \in \mathbb{R}$ に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $r > 0$ が存在して，任意の $x \in \Omega$ に対して $x > r$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つことである．このとき，$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ などとかく．$x \to a$ のときも同様.

以下特に言及しなければ $\Omega \subset \mathbb{R}$，$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ を関数とする.

命題 3.1 $a, A \in \mathbb{R}$ とする．次は同値.

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in \Omega \setminus \{a\}$ かつ $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ となる数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{x \to a} f(a_n) = A$.

命題 3.2 $a, A, B \in \mathbb{R}$，$f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ を関数，$\lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B$ とする. このとき次が成り立つ.

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B$

(ii) $\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = AB$

(iii) 任意の $x \in \Omega \setminus \{a\}$ に対して $g(x) \neq 0$ かつ $B \neq 0$ であるとき，$\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{A}{B}$

命題 3.3 (Cauchy の収束条件) 関数 $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ が $x \to a$ のときある実数に収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x, y \in \Omega$ に対して $0 < |x - a|, |y - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \delta$ が成り立つことである.

定義 (関数の発散) $x \to a$ のとき $f(x)$ が $+\infty$ に発散するとは，任意の $R > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x \in \Omega$ に対して $0 < |x - a| < \delta$ ならば $f(x) > R$ が成り立つことである．このとき，$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ などとかく.

定義 (連続) $a \in \Omega$ とする．f が $x = a$ で **連続** であるとは，$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であることをいう.

定義 (一様連続) f が **一様連続** であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，任意の $x, y \in \Omega$ に対して $0 < |x - y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つことである．

これは δ のとり方が x に依存していない分，各点での連続よりも強いことを主張している．一様連続ならば連続であることが確かめられる．

命題 3.4 有界閉集合の連続関数は一様連続である．

命題 3.5 関数 $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ が一様連続ならば，f は閉包 $\overline{\Omega}$ 上の連続関数 $\widetilde{f}$ に一意的に拡張され，しかも $\widetilde{f}$ は一様連続である．

定義 (関数列，各点収束) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ が関数であるとき，$\{f_n\}$ を Ω 上の **関数列** という．$x \in \Omega$ を一つ固定して得られる数列 $\{f_n(x)\}$ が収束するとき，関数列 $\{f_n\}$ は $x \in \Omega$ で収束するという．

さらに関数列 $\{f_n\}$ が任意の $x \in \Omega$ で収束するとき，$\{f_n\}$ は Ω 上 **各点収束** するという．つまり，任意の $x \in \Omega$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つことをいう．このとき $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とかく．

定義 (一様収束) Ω 上の関数列 $\{f_n\}$ が f に **一様収束** するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ と任意の $x \in \Omega$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つことをいう．

各点収束は点を指定してからその収束性を論じていて，一方で一様収束は ε は点を指定する前にその収束性を論じていることに注意する．一様収束ならば各点連続であることがすぐにわかる．

命題 3.6 (Cauchy の収束条件) Ω 上の関数列 $\{f_n\}$ が Ω 上で一様収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n, m \geq 0$ と任意の $x \in \Omega$ に対して $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ が成り立つことである．

命題 3.7 Ω 上の関数列 $\{f_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty} \sup \_x \in \Omega |f_n(x) - f(x)| = 0$$

をみたすならば，関数列 $\{f_n\}$ は Ω 上 f に一様収束する．

これは一様収束の定義の言い換えにすぎない．

命題 3.8　Ω 上で一様収束する連続関数列 $\{f_n\}$ は，その極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ も連続である．

定義　(広義一様収束)　$I \subset \mathbb{R}$ を区間，$\{f_n\}$ を区間 I 上の関数列とする．任意の有界閉区間 $J \subset I$ に対して $\{f_n\}$ が J 上一様収束するとき，$\{f_n\}$ は I 上 **広義一様収束** するという．

命題 3.9　$a \in \Omega$，$\varepsilon > 0$ に対して $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ の $\Omega \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ への制限が a で連続であるとする．このときもとの f も a で連続である．

命題 3.10　$I \subset \mathbb{R}$ を区間，$\{f_n\}$ は I 上の連続関数列とする．$\{f_n\}$ が I 上 f に広義一様収束するとき，f は連続である．

4　級数と収束

定義　(級数)　数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

を **無限級数** または単に **級数** という．また，有限個で打ち切った和を

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

を **部分和** という．

級数が収束することは数列 $\{S_n\}$ が収束することと定め，そのとき $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ を級数の **和** といい，$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表す．

定理 4.1 (Cauchy の収束条件)　級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ と任意の $p \geq 1$ に対して $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$ となることである．

これは数列 $\{S_n\}$ が Cauchy 列であることを示している．

定義　(絶対収束，条件収束)　絶対値に関する級数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は **絶対収束** するという．絶対収束はしないが級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するとき，**条件収束** するという．

命題 4.2　級数が絶対収束するならば収束する．

証明　$\varepsilon>0$ をとる．絶対収束していると仮定すると，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して任意の $n\geq n_0$ と任意の $p\geq 1$ に対して $||a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}||<\varepsilon$ が成り立つ．三角不等式より，

$$||a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}||<||a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}||<\varepsilon$$

であるから，Cauchy の収束条件よりこの級数は収束する．■

定義　(関数項級数)　各項が関数である級数を **関数項級数** といい，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ などとかく．

部分和の列 $\displaystyle\left\{\sum_{n=1}^{m}f_n(x)\right\}$ が点 x で収束するとき．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ は点 x で収束するという．他，各点収束，一様収束，広義一様収束，絶対収束なども部分和の列の収束性で定める．

命題 4.3 (Cauchy の収束条件)　Ω 上の関数項級数 $\sum f_n(x)$ が一様収束するための必要十分条件は任意の $\varepsilon>0$ に対してある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n\geq n_0$ と任意の $p\geq 1$ に対して $|f_{n+1}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|<\varepsilon$ となることである．

命題 4.4　Ω 上の関数項級数 $\sum f_n(x)$ が一様絶対収束するとき，絶対収束である．

命題 4.5　Ω 上の関数項級数 $\sum f_n(x),\sum g_n(x)$ に対して，各 $n\in\mathbb{N}$ と任意の $x\in\Omega$ に対して $|f_n(x)|\leq g_n(x)$ かつ $\sum g_n(x)$ が一様収束するならば，$\sum f_n(x)$ は一様絶対収束する．

定理 4.6 (Weierstrass の M-判定法)　Ω 上の関数項級数 $\sum f_n(x)$ と，収束正項級数 $\sum a_n$ に対して，各 $n\in\mathbb{N}$ と任意の $x\in\Omega$ に対して $|f_n(x)|\leq a_n$ とする．このとき関数項級数 $\sum f_n(x)$ は Ω 上一様絶対収束．

定義　(ベキ級数)　数列 $\{a_n\}$ と定数 b に対して，

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-b)^n=a_0+a_1(x-b)+a_2(x-b)^2+\cdots+a_n(x-b)^n+\dots$$

の形の関数項級数を，b を中心とする **ベキ級数** という．

以下，ベキ級数は $b=0$ の場合を扱う．

命題 4.7 (比較判定法) 級数 $\sum a_n, \sum b_n$ が，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ に対して $|a_n| \leq b_n$ であるとき，$\sum b_n$ が収束するならば $\sum a_n$ は絶対収束する．

定理 4.8 (Cauchy の判定法) 級数 $\sum a_n$ に対して次のことが成り立つ：

(i) ある定数 $0 \leq r < 1$ とある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ に対して $\sqrt[n]{|a_n|} \leq r$ ならば，$\sum a_n$ は絶対収束する．

(ii) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ならば $\sum a_n$ は絶対収束する．

(iii) 無限個の n に対して $|a_n| \geq 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する．

(iv) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する．

証明 (i)：任意の $n \geq n_0$ に対して $|a_n| \leq r^n$ で，級数 $\displaystyle\sum r^n = \frac{1}{1-r}$ は収束する．比較判定法より $\sum a_n$ は絶対収束する．

(ii)：$r = \dfrac{1}{2}(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} + 1)$ として (i) を使う．$c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$，$\varepsilon = r - c$ とすると，上極限の特徴づけからある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ が存在して $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c + \varepsilon = r$ となる．

(iii)，(iv)：$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ゆえ，$\sum a_n$ は発散する． ■

定義 (収束半径) ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して正の数

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

を **収束半径** という．なお，$\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty$ と約束する．

命題 4.9 ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ に対して $R \neq 0$ ならば, 開区間 $(-R, R)$ でベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ は広義一様絶対収束する．また，$|x| > R$ のときこのベキ級数は発散する．

命題 4.10 $0 \leq r \leq \infty$ がベキ級数 $\sum a_n(x-b)^n$ の収束半径であるための必要十分条件は，$|x| < r$ ならば $\sum a_n(x-b)^n$ は収束し，$|x| > r$ ならば $\sum a_n(x-b)^n$ は発散することである．

定理 4.11 (d'Alembert の判定法) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \neq 0$ となる級数 $\sum a_n$ に対して次が成り立つ．

(i) ある定数 $0 \leq r < 1$ とある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ に対して $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq r$ ならば，$\sum a_n$ は絶対収束する．

(ii) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ならば $\sum a_n$ は絶対収束する．

(iii) とある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $n \geq n_0$ に対して $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する．

(iv) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する．

証明 (i)：任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq r$ としてよい．このとき $|a_n| \leq |r^n a_0|$ である．よって $\sum r^n |a_0| = |a_0| \sum r^n$ は収束する．よって $\sum a_n$ は絶対収束する．

(ii)：$r = \dfrac{1}{2}(\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| + 1)$ として (i) を使う．あとの議論は Cauchy の判定法の証明と同様．

(iii)：任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ としてよい．$0 < |a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$ ゆえ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ で $\sum a_n$ は発散する．

(iv)：(iii) よりすぐにしたがう． ■

命題 4.12 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \neq 0$ となるベキ級数 $\sum a_n x^n$ に対して

$$r = \varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

とおくと，ベキ級数 $\sum a_n x^n$ は開区間 $(-r, r)$ 上で広義一様絶対収束である．また，

$$r' = \varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

とおくと，ベキ級数 $\sum a_n x^n$ は $|x| > r'$ で発散する．

特に $+\infty$ を許して $r = r'$ ならばこれは収束半径 R に一致する．

証明 前半，$0 \leq q < r$ として，閉区間 $[-q, q]$ 上で一様絶対収束することを示せばよい．$x \in [-q, q]$ ならば $\sum |a_n x^n| \leq \sum |a_n| q^n$ である．

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|q^{n+1}}{|a_n|q^n} = q \varlimsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{q}{r} < 1$$

d'Alembert の判定法より $\sum |a_n| q^n$ は収束する．Weierstrass の M-判定法より元の級数 $\sum a_n x^n$ は閉区間 $[-q, q]$ 上で一様絶対収束する．

後半，

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{a_n x^n} = |x| \varliminf_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{|x|}{r'}$$

より，同様にして $\sum a_n x^n$ は発散する．

以上より $r \leq R \leq r'$ で，$r = r'$ より $R = r = r'$ となる． ■

参考文献

[1] 笠原晧司, 微分積分学, サイエンス社
[2] 難波誠, 微分積分学, 裳華房
[3] 小平邦彦，解析入門 I，岩波書店
[4] 神保道夫，複素関数入門，岩波書店