行列の標準形に関するトピックス

氷上優希 (coolplus099)

2014 年 11 月 4 日

A を n 次正方行列，V を $\mathbb{C}^n$ 上のベクトル空間とする．

■ **行列の対角化**　$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ を A の固有値とする．**固有値 λ_i に対する固有空間**$W(\lambda_i)$ を

$$W(\lambda_i) = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda_i E) = \{ v \in V \mid (A - \lambda_i E)v = 0 \}$$

で定める．また，t に関する多項式 $f(t) = \det(tE - A)$ を A の **固有多項式** という．

$$f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \ldots (t - \lambda_s)^{m_s}$$

ならば $m_i = \dim W(\lambda_i)$ である．$\dim W(\lambda_i) = n - \mathrm{rank}\ (A - \lambda_i E)$ が成り立つ．

固有値 λ_i に対する一般固有空間$\tilde{W}(\lambda_i)$ を

$$\tilde{W}(\lambda_i) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathrm{Ker}\ (A - \lambda_i E)^l = \left\{ v \in V \;\middle|\; \exists l \geq 1 \text{ s.t. } (A - \lambda_i E)^l v = 0 \right\}$$

で定める．一般に $W(\lambda_i) \subset \tilde{W}(\lambda_i)$ であり，$\mathbb{C}^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} \tilde{W}(\lambda_i)$ が成り立つ．

等式

$$\mathrm{rank}\ (A - \lambda_i E)^l = n - \dim W(\lambda_i)$$

をみたす最小の自然数 l を l_i とかく．A の最小多項式を $\varphi(t)$ とすると，

$$\varphi(t) = (t - \lambda_1)^{l_1}(t - \lambda_2)^{l_2} \ldots (t - \lambda_s)^{l_s}$$

が成り立つ．

行列 A が対角化可能であること次の 4 条件は同値である．

(1) 固有値 λ_i の固有ベクトルを u_i とすると、行列 $P = [u_1\ u_2\ \ldots\ u_n]$ は正則である．
(2) 各 i に対して $\dim W(\lambda_i) = \dim \tilde{W}(\lambda_i)$ が成り立つ．
(3) $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} W(\lambda_i)$ が成り立つ．
(4) A の最小多項式をは重根をもたない．

特に，A の固有多項式が重根をもたなければ A は対角化可能である．

■ Jordan 標準形　<u>**固有値 λ_i のサイズ k_j の** Jordan **細胞**</u> とは，k_j 次正方行列

$$J(\lambda_i, k_j) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

のことである．A の Jordan 標準形 J は行列の直和

$$J = \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{j=1}^{m_i} J(\lambda_i, k_j)$$

で表される．A の Jordan 標準形に現れる Jordan 細胞については以下が成り立つ．

(1) 固有値 λ_i の Jordan 細胞の個数は $\dim W(\lambda_i)$ である．

(2) 固有値 λ_i の Jordan 細胞のうちの最大のサイズは $\dim \tilde{W}(\lambda_i)$ である．

(3) 固有値 λ_i に属する Jordan 細胞のサイズの和は固有値 λ_i の重複度に等しい．

(4) $AP = PJ(\lambda_i, k_j)$ をみたす k_j 次正則行列 $P = [u_1 \ u_2 \ \ldots \ u_{k_j}]$ に対して，

$$(A - \lambda_i E)u_1 = 0, \quad (A - \lambda_i E)u_i = u_{i-1} \ (i = 2, 3, \ldots, k_j)$$

が成り立つ．

(5) j 次 Jordan 細胞の個数 $q(j)$（$j = 1, 2, \cdots, r(\lambda_i)$）について次式が成り立つ．

$$q(j) = \text{rank } (A - \lambda_i E)^{j+1} - 2\text{rank } (A - \lambda_i E)^j + \text{rank } (A - \lambda_i E)^{j-1}$$

参考文献

[1] 線型代数学，佐武一郎，裳華房

[2] 線型代数入門，松坂和夫，岩波書店

[3] 重点解説　ジョルダン標準形，西山享，サイエンス社