サイクロイドの方程式の導出

氷上優希 (@coolplus099)

平成 25 年 7 月 3 日

（きっかけとなる問題：最速降下問題）

$\mathbb{R}^3$ 内の平面を考える．平面上の 2 点 $A=(a,a')$，$B=(b,b')$ を結ぶ曲線に沿って，質点が点 A から点 B まで初速 0 で運動することを考える．降下時間が最小となる C^1 級の曲線を求めたい．

（アプローチ）

求めるべき C^1 級曲線が $y=y(x)$ で与えられるとする．線素は,

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$$

であるから速度は,

$$v:=\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+y'^2}\frac{dx}{dt}$$

である．微小時間 dt は変形することで,

$$dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}dx$$

である．この斜面上での重力加速度を g とすると，力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}v^2+gy=ga'$$

$$v=\sqrt{2g(a'-y)}$$

であるから，降下に必要な時間は,

$$T=\int_a^b dt=\int_a^b\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(a'-y)}}\,dx$$

で与えられる．結局，最速降下問題は以下のようにまとめられる．

サイクロイド

x，y，$y'(=\frac{dy}{dx})$ の関数

$$T(y)=\int_a^b\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g(a'-y)}}\,dx \tag{1}$$

を最小にする C^1 級曲線 $y=y(x)$ を求めよ．

このような ”関数の関数 ”

$$F(y)=\int_a^b f(x,y,v)\,dx$$

を汎関数といい，汎関数の極値問題を変分問題という．

極値問題であるから，汎関数の微分が 0 になる点を求めればよい．そのような点は次の微分方程式 (Euler-Lagrange 方程式) をみたすことが知られている；

Euler-Lagrange 方程式

$y = y(x)$ を C^1 級関数であると仮定する．$f(x, y, v)$（ただし $v = \frac{dy}{dx}$）が汎関数 $F(y) = \int_a^b f(x, y, v)\ dx$ の極値を与えるならば，次の微分方程式をみたす．

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(x, y, v)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, v) \tag{2}$$

実際に式 (1) を式（2）に代入する．紛らわしいので記号を改めて $c = a'$ とする．

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}\sqrt{2g(a'-y)}}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{1+v^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{(a'-y)^3}}$$

であるから，改めて v=y' として，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2g(c-y)}}\right) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{2g}\sqrt{(c-y)^3}}$$

両辺 $\sqrt{2g}$ をかけ，右辺の分母分子に $\sqrt{1+y'^2}$ をかけると，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{c-y}}\right) = \frac{(1+y'^2)^2}{2(\sqrt{1+y'^2}\sqrt{c-y})^3}$$

左辺の微分を行って，

$$\frac{y''\sqrt{1+y'^2}\sqrt{c-y} - y'\left(y'y''\frac{\sqrt{c-y}}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{c-y}}\right)}{2(\sqrt{1+y'^2}\sqrt{c-y})^3} = \frac{(1+y'^2)^2}{2(\sqrt{1+y'^2}\sqrt{c-y})^3}$$

分母払って，

$$2y''(1+y'^2)(c-y) - 2y'^2y''(c-y) + y'^2(1+y'^2) = (1+y'^2)^2$$

さらに整理してやれば，

$$\frac{2y'^2y''}{1+y'^2} = \frac{y'}{y-c}$$

両辺を x で積分して，

$$\log(1+y'^2) = -\log(y-c) + C_0$$

ここに C_0 は積分定数である．以降，言及しなければ各 C_i は実定数とする．変形し，

$$1 + y'^2 = (y-c)^{-1}e^{C_0}$$

$e^{C_1} = 2C_0$ とおくと，

$$(1+y'^2)(y-c) = 2C_1$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{2C_1}{y-c} - 1}$$

これは変数分離型の微分方程式である．よって，

$$\pm\frac{y-c}{\sqrt{2C_1(y-c)-(y-c)^2}}\ dy = dx$$

左辺分母を平方完成させて，

$$\pm\frac{y-c}{\sqrt{{C_1}^2 - (C_1-(y-c))^2}}\ dy = dx$$

$y-c=C_1+C_1\cos t$ と変数変換して積分すると，

$$\begin{aligned} x &= \pm\int \frac{C_1(1-\cos t)}{\sqrt{C_1^2-C^2\cos^2 t}}\ C_1\sin t\ dt \\ &= \pm\int C_1(1-\cos t)\ dt \\ &= \pm C_1(t-\sin t)+C_2 \end{aligned}$$

改めて C，D，E を実定数とすると，

$$\begin{cases} x=\pm C(t-\sin t)+D \\ y=C\cos t+E \end{cases}$$

こうしてサイクロイドの式が導出できた.